TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE E FUNZIONI

La trasformazione geometrica del piano in sé è una corrispondenza biunivoca tra i punti di un piano; è indicata con t ed è un'applicazione del piano in se che trasforma un generico punto P in un punto P'.

Si scrive:
t: P $\rightarrow$ P'   oppure   P'=t(P)   oppure   P $\rightarrow$ P'.

P' è l'immagine di P o punto trasformato di P rispetto a t; P è la controimmagine di P' o antitrasformato di P' e si trova mediante la trasformazione inversa t^{-1}.

Un punto P si dice unito rispetto alla trasformazione t $\Leftrightarrow$ P=P' (il punto si trasforma in se stesso).

Ogni trasformazione si può rappresentare attraverso delle equazioni (espressione analitica della trasformazione) che permettono di calcolare le coordinate di P' date quelle di P:

$$t:\begin{cases} x' = f(x;y) \\ y' = g(x;y) \end{cases}$$

Esempio: il punto A(0;0) attraverso $t:\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = y+1 \end{cases}$ diventa A'(-1;+1)

Se α è una figura geometrica, applicando la trasformazione t ad ogni suo punto si ottiene α' detta trasformata di α.

Si chiama trasformazione identica o identità, la trasformazione ***i*** che associa od ogni punto il punto stesso.

Una curva di equazione F(x;y)=0 si trasforma in F'(x';y')=0 attraverso delle equazioni dette SOSTITUZIONI ASSOCIATE ALLA TRASFORMAZIONE.

$$F(x;y)=0 \quad \xrightarrow[\left[\begin{array}{l} x \rightarrow \frac{x+1}{2} \\ y \rightarrow y+1 \end{array}\right]]{t} \quad F'((x+1)/2;y+1)$$

Ad esempio:
la curva $\gamma : x^2 + y^2 = 1$ attraverso la trasformazione t di equazioni $t:\begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = y+1 \end{cases}$ si trasforma nella curva γ'.

Ricaviamo dalle prime x e y : $\begin{cases} x = \dfrac{x'+1}{2} \\ y = y'-1 \end{cases}$

Sostituiamo in γ' $\Rightarrow \left(\dfrac{x'+1}{2}\right)^2 + (y'-1)^2 = 1$

Si ottiene γ' ’:x’^{2}+4y’^{2}+2x’-2y’+1=0

Applicando poi la sostituzione $\begin{bmatrix} x' \to x \\ y' \to y \end{bmatrix}$ si ottiene γ': x^2+4y^2+2x-2y+1=0.

Quindi, più semplicemente, nell’equazione di partenza, basta utilizzare le sostituzioni associate, ottenute dopo aver ricavato x e y da t.

$$\gamma': x^2+y^2=1 \quad \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to \frac{x+1}{2} \\ y \to y+1 \end{bmatrix}]{t} \quad \gamma': x^2+4y^2+2x-2y+1=0$$

<u>ISOMETRIE</u>

DEFINIZIONE: Sia t una trasformazione e siano rispettivamente A’ e B’ le immagini in t di due punti qualunque A e B del piano cartesiano; se comunque si scelgano A e B, si ha che **AB**$\cong$ **A’B’**, allora si dice che t è una <u>trasformazione isometrica</u> o anche che è un’ISOMETRIA o una CONGRUENZA.

Le isometrie sono trasformazioni che conservano le misure.

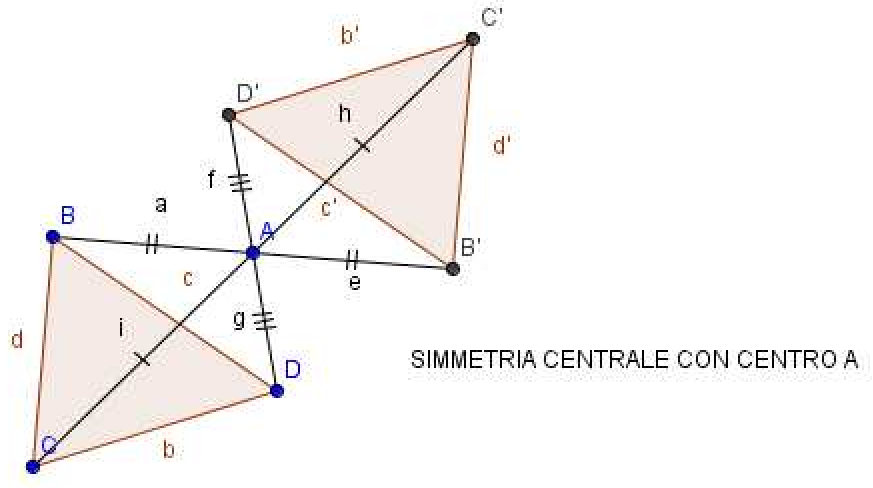
PARTICOLARI ISOMETRIE

SIMMETRIA CENTRALE σ_c

DEFINIZIONE: P’ è simmetrico di P rispetto ad un punto C, se C è il punto medio del segmento PP’.

$$F(x;y)=0 \quad \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to 2x_c - x \\ y \to 2y_c - y \end{bmatrix}]{\sigma_c} \quad F(2xc-x;2yc-y)=0$$

SIMMETRIA CENTRALE DI UN TRIANGOLO.ggb



<u>Particolare tipo di simmetria centrale</u>:

σ_O: simmetria rispetto all'origine degli assi, si ottiene applicando le seguenti sostituzioni:

$$F(x;y)=0 \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to -x \\ y \to -y \end{bmatrix}]{\sigma_O} F(-x;-y)=0$$

- Se risulta F(x;y)= F(-x;-y) allora la curva rappresentata dalla funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi e la funzione si dice DISPARI.

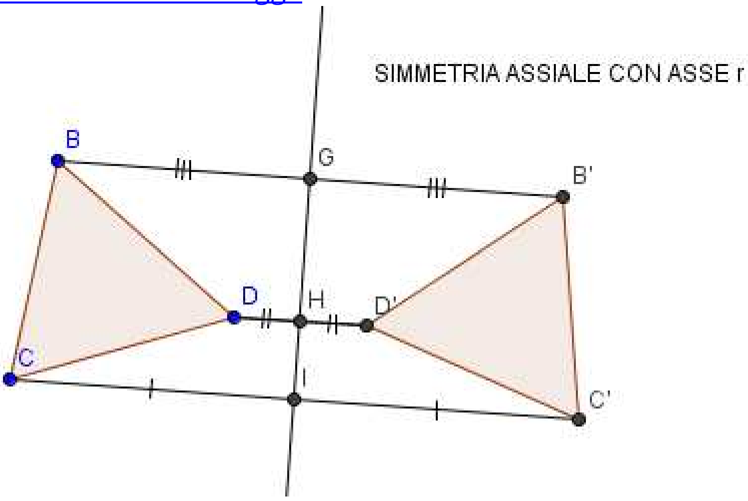
SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE DEGLI ASSI.ggb
SIMMETRIA CENTRALE DI UNA CURVA.ggb

SIMMETRIA ASSIALE σ_r

DEFINIZIONE: P' è simmetrico di P rispetto alla retta r (detta asse di simmetria) , se PP' è perpendicolare ad r e se $r \cap PP' = \{M\}$ punto medio del segmento PP'.

La simmetria assiale rispetto ad r è quella trasformazione che associa ad ogni punto P del piano il suo simmetrico P' rispetto ad r.

SIMMETRIA ASSIALE DI UN TRIANGOLO.ggb



Particolari tipi di simmetrie assiali:

σ_y : simmetria rispetto all'asse y; si ottiene applicando le seguenti sostituzioni:

$$F(x;y)=0 \quad \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to -x \\ y \to y \end{bmatrix}]{\sigma_y} \quad F(-x;y)=0$$

- Se risulta F(x;y)= F(-x;y) allora la curva rappresentata dalla funzione è simmetrica rispetto all'asse y - la funzione si dice PARI.

SIMMETRIA ASSIALE DI UNA PARABOLA.ggb

$\sigma_{y=x}$: simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante; si ottiene applicando le seguenti sostituzioni:

$$F(x;y)=0 \quad \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to y \\ y \to x \end{bmatrix}]{\sigma_{x=y}} \quad F(y;x)=0$$

- Ricordiamo che se una funzione è biunivoca, la funzione e la sua inversa sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

SIMMETRIA RIPETTO Y=X DI UNA PARABOLA.ggb
SIMMETRIA Y=X.ggb

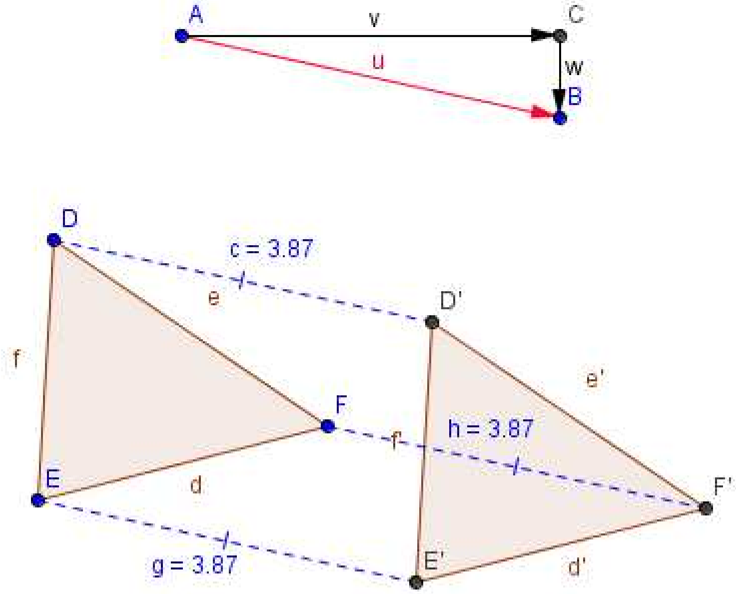
TRASLAZIONE τ

DEFINIZIONE: Dato nel piano un vettore $\vec{v}$, la traslazione di vettore $\vec{v}$ è quella trasformazione geometrica che ad ogni punto P fa corrispondere il punto P’ tale che
$\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ $\left(\overline{PP'} = |v|\right)$.

Dato $\vec{v} = (a;b)$ F(x;y)=0 $\xrightarrow{\tau(a;b)}$ F(x-a ; y-b)=0

$$\begin{bmatrix} x \to x-a \\ y \to y-b \end{bmatrix}$$

[TRASLAZIONE DI UN TRIANGOLO.ggb]



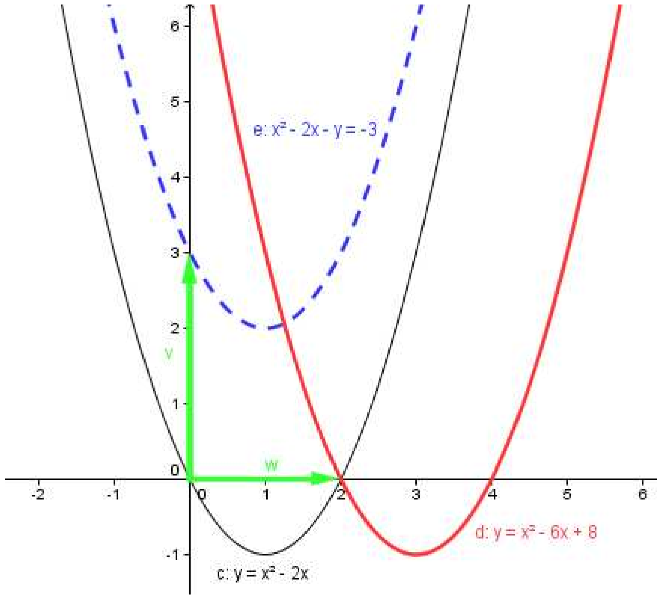
a) se $\tau(0;b)$ $\Rightarrow$ TRASLAZIONE VERTICALE $\begin{cases} b>0 & \textit{verso l'alto} \\ b<0 & \textit{verso il basso} \end{cases}$

b) se $\tau(a;0)$ $\Rightarrow$ TRASLAZIONE ORIZZONTALE $\begin{cases} a>0 & \textit{verso destra} \\ a<0 & \textit{verso sinistra} \end{cases}$

c) il grafico di y=f(x)+b si ottiene <u>traslando verticalmente</u> di una quantità b il grafico di y=f(x);

d) il grafico di y=f(x-a) si ottiene <u>traslando orizzontalmente</u> di una quantità a il grafico di y=f(x).

TRASLAZIONE VERTICALE E ORIZZONTALE.ggb



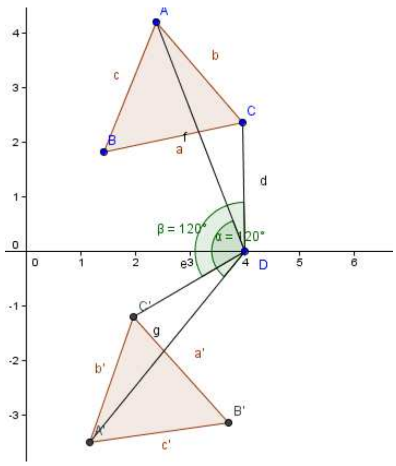
ROTAZIONE $r_{c,\alpha}$

DEFINIZIONE: Dato nel piano un un punto C ed un angolo orientato α, si definisce rotazione di centro C ed angolo α quella trasformazione che associa, ad un punto P del piano, il punto P’ tale che $\overline{PC} = \overline{PC'}$ e $P\hat{C}P' \cong \alpha$.

Nel caso in cui il centro di rotazione coincide con l’origine degli assi O si ha la seguente rotazione:

$$F(x;y)=0 \quad \xrightarrow[\begin{bmatrix} x \to \text{xcos}\alpha + \text{ysen}\alpha \\ y \to \text{- xsen}\alpha + \text{y cos}\alpha \end{bmatrix}]{r_{O,\alpha}} \quad F(x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha\ ;\ -x\ \text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha)=0$$

ROTAZIONE DI UN TRIANGOLO.ggb



SIMILITUDINI

DEFINIZIONE: Si ha una similitudine se comunque si scelgano A e B le immagini A’ e B’ sono tali che $\frac{A'B'}{AB} = k \quad oppure \quad A'B' = kAB$, k è detto rapporto di similitudine (se k=1 la similitudine coincide con una isometria).

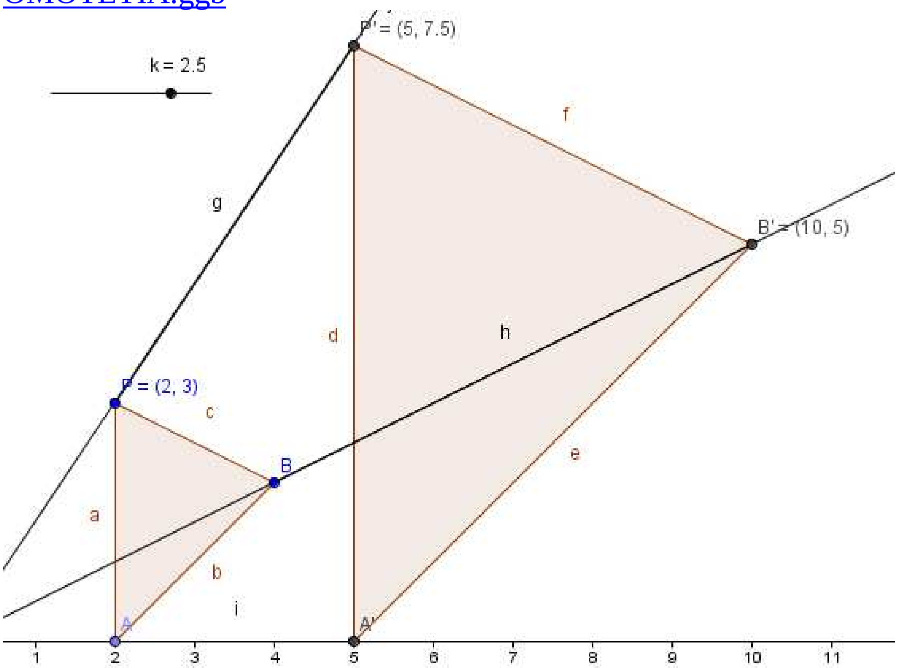
PARTICOLARE SIMILITUDINE - OMOTETIA $\omega_{O,K}$

DEFINIZIONE: si ha un’omotetia di rapporto k$\neq$0 con centro nell’origine $\omega_{O,K}$, quella trasformazione che ad un punto P(x;y) fa corrispondere un punto P’(kx;ky).

$$F(x;y)=0 \quad \xrightarrow{\omega_{0,k}} \quad F(x/k\ ;\ y/k)=0$$

$$\begin{bmatrix} x \to \frac{1}{k}x \\ y \to \frac{1}{k}y \end{bmatrix}$$

OMOTETIA.ggb



se
$|k|>1 \Rightarrow$ omotetia è un INGRANDIMENTO
$|k|<1 \Rightarrow$ omotetia è una RIDUZIONE
$k=1 \Rightarrow$ IDENTITA'
$k=-1 \Rightarrow$ SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE

INGRANDIMENTO - RIDUZIONE.ggb

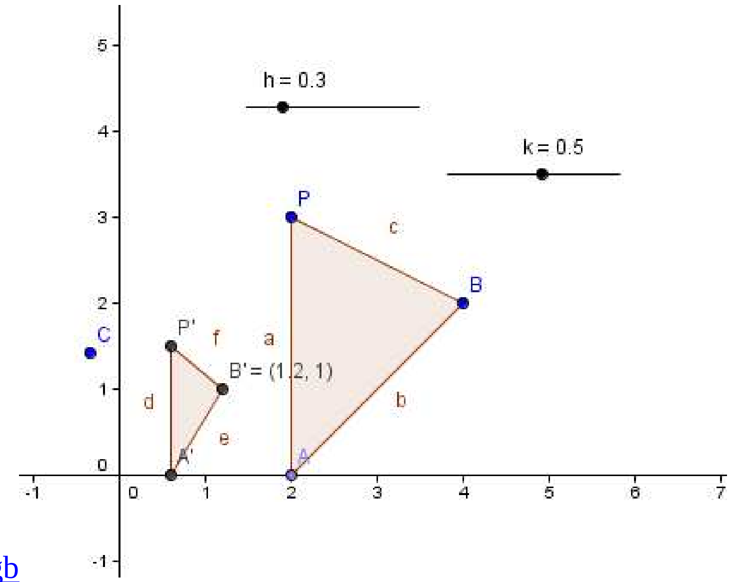
AFFINITA'

DEFINIZIONE: Si definisce affinità ogni trasformazione di equazioni $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ = a1b2-a2b1 $\neq$ 0, ovvero ogni trasformazione in cui le coordinate del punto trasformato sono funzioni lineari di x e y.

PARTICOLARI AFFINITA' - DILATAZIONI $\delta_{h,k}$

DEFINIZIONE: dati h $\neq$ 0 e k $\neq$ 0, si dice dilatazione $\omega_{h,K}$,con centro nell'origine e di rapporti h e k, quella trasformazione che ad un punto P(x;y) fa corrispondere un punto P'(hx;ky).

$$F(x;y)=0 \xrightarrow[\left[\begin{array}{l} x \to \frac{1}{h}x \\ y \to \frac{1}{k}y \end{array}\right]]{\delta_{h,k}} F(x/h;y/k)=0$$

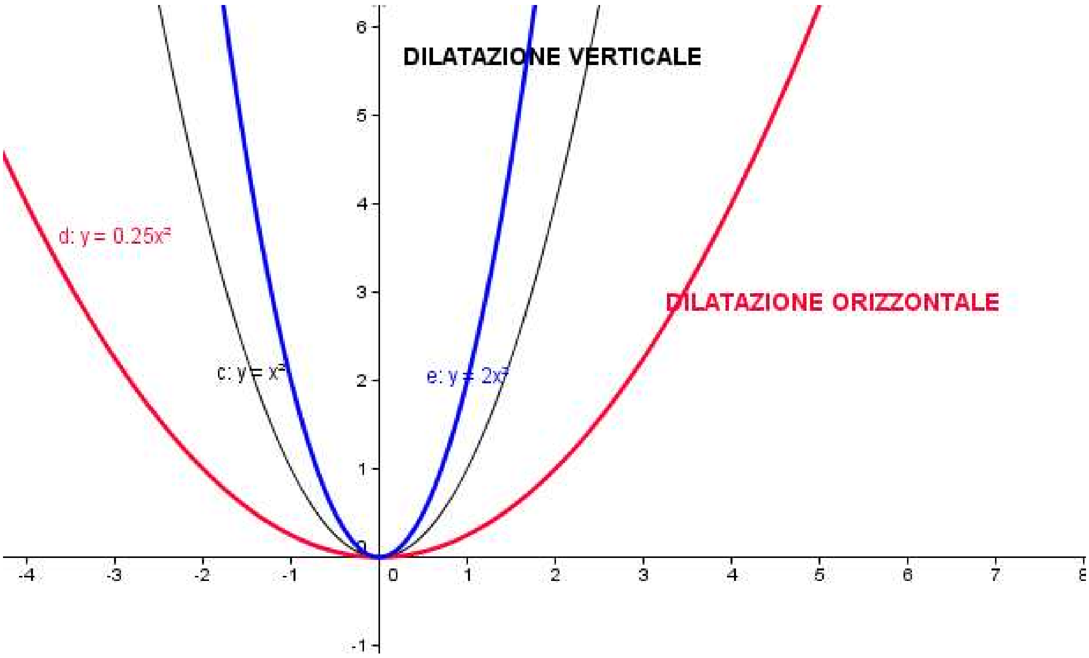


AFFINITA'.ggb

a) se $\begin{cases} h = k \;\Rightarrow\; l'affinità \;\; è\ un\ OMOTETIA \\ h = -1\ e\ k = 1 \Rightarrow\ SIMMETRIA\ RISPETTO\ ASSE\ Y \\ h = k = -1 \Rightarrow SIMMETRIA\ RISPETTO\ ALL'ORIGINE \\ h \neq 1\ e\ k = 1 \Rightarrow\ DILATAZIONE\ ORIZZONTALE \\ h = 1\ e\ k \neq 1 \Rightarrow\ DILATAZIONE\ VERTICALE \end{cases}$

b) il grafico di y= kf(x) si ottiene applicando una dilatazione verticale di rapporto k (h=1) al grafico di y= f(x);
c) il grafico di y= f(x/h) si ottiene applicando una dilatazione orizzontale di rapporto h (k=1) al grafico di y= f(x).

DILATAZIONE.ggb



RIASSUMENDO:

$$ISOMETRIE \quad \begin{cases} SIMMETR\ A \quad CENTRALE \\ SIMMETRIA \quad ASSIALE \\ TRASLAZIONI \\ ROTAZIONI \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad MANTENGONO \quad LE\ \ DISTANZE$$

$$SIMILITUDINI \quad \{OMOTETIA \qquad (POSSONO\ ESSERE\ \ ISOMETRIE)$$

$$AFFINITA' \quad \{DILATAZIONI \qquad (POSSONO\ \ ESSERE\ \ OMOTETIE)$$